Spectres et stabilisation d'∞-catégories

Victor Saunier

7 octobre 2021

1 ∞-catégories stables

Ce texte est une retranscription de notes d'un exposé donné pour le groupe de travail *Calcul de Goodwillie* du LAGA le 7 octobre 2021.

Definition 1.1 Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie. On dit que $\mathcal{C}$ est **stable** si elle vérifie les propriétés suivantes:

- $\mathcal{C}$ est pointée, i.e. elle a un objet zéro qu'on notera 0 et qui est bien défini à un espace contractile près.
- Tout morphisme f de $\mathcal{C}$ a un noyau et un conoyau (qu'on appellera aussi fibre et cofibre)
- Les carrés de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

  sont cartésiens si et seulement si ils sont cocartésiens.

Remark 1.2 On peut comparer cette définition avec celle d'une notion usuelle de théorie des 1-catégories: les catégories abéliennes. Par rapport à la définition d'une catégorie abélienne telle que donnée dans [ML97] par exemple, notre définition manque l'existence de biproduits mais c'est en fait une conséquence des autres, et le dernier axiome est différent.

Pour mémoire, dans [ML97] le dernier axiome demande que tous les monomorphismes soient des noyaux et tous les épimorphismes des cononyaux. Dans le contexte stable, ces choses sont réalisés pour tout morphisme sans distinction d'épi/mono. En effet, tout morphisme $f : A \to B$ se réalise dans un carré exact

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

en prenant le pushout. Puisqu'il s'agit aussi d'un carré cartésien par l'axiome 3, c'est que f est le noyau de g. Le raisonnement dual donne le fait que tout morphisme est un conoyau. Les catégories ordinaires qui sont stables vu comme ∞-catégories sont donc en particulier abéliennes.

Une telle 1-catégorie stable est en fait triviale. En effet, dans une catégorie abélienne, on a toujours $\ker(\mathrm{coker}(f)) \simeq \mathrm{coker}(\ker(f))$ et si elle est aussi stable, on a deux carrés exacts:

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{coker}(f) \end{tikzcd}$$

et donc $\mathrm{coker}(\ker(f)) \to B$ est un isomorphisme, de même que $A \to \ker(\mathrm{coker}(f))$. Avec l'isomorphisme $\ker(\mathrm{coker}(f)) \simeq \mathrm{coker}(\ker(f))$, on conclut que f est un isomorphisme. Ainsi, notre 1-catégorie est un groupoïde avec un objet zéro, elle est donc équivalente à la catégorie triviale.

Les ∞-catégories stables ont des propriétés très agréables, similaires à celles des catégories abéliennes:

Proposition 1.3 Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie stable, et K un ensemble simplicial, alors on a:

- $\mathcal{C}$ a toutes les colimites et les limites finies
- L'∞-catégorie $\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})$ des foncteurs est stable.
- Un carré

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

  est cartésien ssi il est cocartésien. Un tel carré est dit exact. En conséquence, on trouve que les produits et les coproduits coïncident en ce que l'on note la somme directe $\oplus$.
- Il y a un *splitting lemma*: si $X \to Y \to Z$ est une fibre-cofibre tel que f a une rétraction ou g une section, alors on a une équivalence $Y \simeq X \oplus Y$.

Les preuves de ces faits se trouvent dans la section I de *Higher Algebra*, [Lur17], sauf le dernier point, qu'on peut trouver dans [CDH+21], Lemma 1.5.12.

Definition 1.4 Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre ∞-catégories stables est dit *exact* s'il est réduit, i.e. préserve les objets zéros, et préserve les fibres ou les cofibres.

On peut montrer (cf. [Lur17] 1.1.4.1) qu'un tel foncteur préserve les limites et les colimites finies. On note $\mathrm{Fun}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ des foncteurs réduits et $\mathrm{Fun}^{Ex}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ celle des foncteurs exacts.

Il y a une ∞-catégorie $\mathbf{Cat}_\infty^{Ex}$, qui est la sous-catégorie non-pleine de $\mathbf{Cat}_\infty$ des ∞-catégories stables et les foncteurs exacts entre elles.

2 Stabilisation

Une conséquence du troisième point de la définition est que les foncteurs $\Sigma(X) := \mathrm{coker}(X \to 0)$ et $\Omega(X) := \ker(0 \to X)$ sont inverses l'un de l'autre. En effet, on a les diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

Celui de gauche est par définition cocartésien, mais donc aussi cartésien, et donc $\Omega\Sigma X \simeq X$. De même le carré de droite est cartésien et donc cocartésien, ce qui implique $\Sigma\Omega X \simeq X$.

L'inversibilité de Σ ou de Ω sont en fait caractéristiques des catégories stables, comme l'explique la proposition suivante:

Proposition 2.1 Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie pointée. Il y a équivalence entre:

1. $\mathcal{C}$ est stable
2. Tout morphisme de $\mathcal{C}$ a une cofibre et Σ est une équivalence
3. Tout morphisme de $\mathcal{C}$ a une fibre et Ω est une équivalence

Ce résultat est technique, et sa preuve (longue) est dans [Lur17] mais il est central pour notre discussion de la stabilisation d'une ∞-catégorie: si on a $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie avec des limites finies, alors il suffit d'inverse Ω pour avoir une catégorie stable (et dualement avec Σ et des colimites).

Definition 2.2 Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie pointée avec des limites finies, on pose:

$$\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C}) := \lim(\ldots \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C} \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C} \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C})$$

$\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$ est l'∞-catégorie des objets Ω-spectres de $\mathcal{C}$. Elle est muni d'un foncteur $\Omega^{\infty} : \mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$.

Dualement, on pose:

$$\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C}) := \mathrm{colim}(\mathcal{C} \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C} \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C} \xrightarrow{\Sigma} \ldots)$$

pour $\mathcal{C}$ pointée ayant les colimites finies. $\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$ est l'∞-catégorie des objets Ω-spectres de $\mathcal{C}$. Elle est muni d'un foncteur $\Sigma^{\infty} : \mathcal{C} \to \mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$.

Soit $\mathbf{Cat}_{\infty}^{finlim}$, la sous-catégorie des ∞-catégories pointées avec des limites finies et les foncteurs réduits préservant les limites entre elles. Comme l'inclusion $\mathbf{Cat}_{\infty}^{finlim} \subset \mathbf{Cat}_{*}$ préserve les limites et les colimites, on peut prendre la limite définissant $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$ dans l'une des deux indifférement, et dualement pour l'autre. En particulier, $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$ a toutes les limites finies et $\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$ toutes les colimites finies.

Plusieurs questions se posent, auquel on va tenter de répondre une par une:

- $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$ et $\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$ sont-elles stables ?
- Si oui, sont-elles universelles pour les catégories stables muni d'un foncteur depuis ou vers $\mathcal{C}$?
- Peut-on avoir une description plus facile d'accès de ces ∞-catégories ?
- Ces deux ∞-catégories coïncident-elles ?

La réponse aux trois premières questions est oui, comme on va le voir dans la suite. Cependant, $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$ et $\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$ ne coïncident pas en général, même si on verra que sous hypothèse de présentabilité, les deux constructions sont très reliées.

Commençons par traiter la première question, qui est immédiate:

Proposition 2.3 Si $\mathcal{C}$ est pointée et a des limites finies, $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$ est stable. Si $\mathcal{C}$ est pointée et a des colimites finies, $\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$ est stable.

Proof. C'est immédiat, car tout les morphismes de $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$ ont une fibre et Ω y est inversible (et dualment pour $\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$). $\square$

L'universalité n'est pas très compliquée non plus:

Proposition 2.4 Le foncteur $\mathrm{Sp}^{\Sigma} : \mathbf{Cat}_{*}^{fincolim} \to \mathbf{Cat}_{\infty}^{Ex}$ est un adjoint à gauche de l'inclusion. Dualement, $\mathrm{Sp}^{\Sigma} : \mathbf{Cat}_{*}^{finlim} \to \mathbf{Cat}_{\infty}^{Ex}$ est un adjoint à droite de l'inclusion.

Proof. Si $\mathcal{D}$ est stable, alors on a

$$\mathrm{Fun}^{Ex}(\mathcal{D}, \mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})) = \mathrm{Fun}_{*}^{finlim}(\mathcal{D}, \mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C}))$$

et ce dernier est la limite du diagramme

$$\ldots \xrightarrow{\Omega^{*}} \mathrm{Fun}_{*}^{finlim}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\Omega^{*}} \mathrm{Fun}_{*}^{finlim}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

Or, pour un foncteur F qui préserve les limites, postcomposer par Ω dans $\mathcal{C}$ revient à précomposer par Ω dans $\mathcal{D}$. Or $\mathcal{D}$ est stable, et donc Ω y est une équivalence. $\mathrm{Fun}^{Ex}(\mathcal{D}, \mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C}))$ est donc la limite d'une tour d'équivalences, et donc équivalent à n'importe lequel des termes, i.e. on a:

$$\mathrm{Fun}^{Ex}(\mathcal{D}, \mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{Fun}_{*}^{finlim}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$$

d'où l'adjonction voulue. $\square$

3 Foncteurs excisifs et Ω-spectres

Pour répondre à notre troisième question, il faut introduire un peu de terminologie. On se donne dans la suite $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux ∞-catégories pointées, $\mathcal{C}$ ayant toutes les colimites finies et $\mathcal{D}$ les limites finies.

Definition 3.1 Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit *excisif* s'il envoie les carrés cocartésiens sur les carrés cartésiens.

On note $\mathrm{Exc}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fun}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ des foncteurs réduit excisifs.

Lemma 3.2 $\mathrm{Exc}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est stable

Proof. Comme $\mathcal{D}$ a les limites finies et que les limites de foncteurs excisifs restent excisifs (elles se calculent point par point), il suffit de voir que Ω est une équivalence. Encore une fois, les limites se calculent point par point donc sur $\mathrm{Exc}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, Ω correspond juste à la postcomposition par $\Omega_{\mathcal{D}}$.

Or, si $X \in \mathcal{C}$ et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ excisif, le carré suivant est cartésien dans $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & F(\Sigma X) \end{tikzcd}$$

Autrement dit, on a une équivalence naturelle en X $\Omega F(\Sigma X) \simeq F(X)$. Donc la précomposition par Σ est l'inverse voulu (puisque pré- et post-composition commutent, l'équivalence précédente fait office d'unité et de counité). $\square$

Cette construction donne une autre idée pour stabiliser une ∞-catégorie $\mathcal{D}$ avec des limites finies: on peut considérer $\mathrm{Exc}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ pour un $\mathcal{C}$ choisi suffisamment "petit" pour que $\mathrm{Exc}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ soit universel. On ne peut pas prendre $\mathcal{C} = *$, car il n'y a qu'un seul foncteur réduit $* \to \mathcal{D}$. En revanche, si on prend $\mathcal{C}$ librement engendré par un objet et des colimites finies, cette idée aboutit, comme on l'explique maintenant.

Definition 3.3 On note S_*^{fin} la plus petite sous-catégorie pleine de S_*, l'∞-catégorie des espaces pointés, qui contient S^0 et est stable par colimites finies. Cette ∞-catégorie contient donc les sphères et les espaces homotopie-équivalent à un CW-complexe fini.

S_*^{fin} réalise bien l'idée d'être librement engendrée par un objet, S^0, et des colimites finies. En effet, l'évaluation en S^0 induit une équivalence

$$\mathrm{Fun}_*^{fincolim}(S_*^{fin}, \mathcal{D}) \to \mathcal{C}$$

où on peut voir $\mathcal{C}$ comme $\mathrm{Fun}(*, \mathcal{C})$.

Definition 3.4 Pour $\mathcal{C}$ ayant des limites finies, on pose $\mathrm{Sp}(\mathcal{C}) := \mathrm{Exc}_*(S_*^{fin}, \mathcal{C})$. C'est une catégorie stable, muni d'un foncteur $\mathrm{Sp}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ donné par l'évaluation en S^0, qu'on note suggestivement Ω^∞. Ce foncteur est une équivalence si, et seulement si $\mathcal{C}$ est stable, comme le prouve la proposition qui suit.

Proposition 3.5 Si $\mathcal{C}$ est stable, alors $\mathrm{Sp}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$.

Proof. Si $\mathcal{C}$ est stable, alors les carrés cartésiens à l'arrivée sont aussi cocartésiens, donc $\mathrm{Exc}_*(S_*^{fin}, \mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}_*^{finlim}(S_*^{fin}, \mathcal{D})$, et l'argument précédent s'applique. $\square$

$\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ est donc un bon candidat pour être un adjoint à droite de l'inclusion. C'est bien le cas:

Proposition 3.6 Si $\mathcal{C}$ admet des limites finies et $\mathcal{D}$ est stable, alors l'évaluation en S^0 induit une équivalence:

$$\mathrm{Fun}^{Ex}(\mathcal{D}, \mathrm{Sp}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^{finlim}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$$

Proof. Par un jeu de curryfication, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Fun}^{Ex}(\mathcal{D}, \mathrm{Sp}(\mathcal{C})) &\simeq \mathrm{Exc}_*(S_*^{fin}, \mathrm{Fun}_*^{finlim}(\mathcal{D}, \mathcal{C})) \\ &\simeq \mathrm{Sp}(\mathrm{Fun}_*^{finlim}(\mathcal{D}, \mathcal{C}))\end{aligned}$$

mais $\mathrm{Fun}_*^{finlim}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ n'est autre que $\mathrm{Exc}_*(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, qui est stable, et en particulier inchangé par Sp. Ceci conclut. □

Corollary 3.7 Par l'unicité des adjoints, on a donc une équivalence naturelle en $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Sp}(\mathcal{C})$$

On peut expliciter cette équivalence: si $F : S_*^{fin} \to \mathcal{C}$ est réduit excisif, alors la collection des $F(S^n)$ muni des équivalences $F(S^n) \simeq \Omega F(S^{n+1})$ obtenu par excisivité, forme un objet de $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$. Réciproquemment un Ω-spectre donne lieu à un foncteur $S_*^{fin} \to \mathcal{C}$ en forçant l'excisivité.

Remark 3.8 On a obtenu une description de $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$ via les foncteurs excisif. Dualement, on pourrait parler de foncteur coexcisif[a] pour un foncteur qui envoie les carrés cartésiens sur les carrés cocartésiens, et obtenir une description similaire pour $\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$.

Cependant, l'∞-catégorie engendrée par des limites finies et S^1 est nettement moins intuitive[b]: on a pas les sphères S^n mais des espaces de laçets $\Omega^n S^1$ et on ne les recolles pas mais on les tire-en-arrière. Ceci rend $\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$ nettement moins agréable que $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$.

[a] Ce terme ne figure pas dans [Lur17] mais il a quelques occurences dans la littérature
[b] On prend S^1 au lieu de S^0 pour s'assurer que les espaces de laçets successifs soient tous distincts

4 Stabilisation dans les ∞-catégories présentables

Pour répondre à notre dernière question, il convient d'introduire une hypothèse supplémentaire sur nos catégories: la présentabilité (qui, dans le contexte ∞-catégorique corresond à la notion classique de localement présentable). Ceci fera encore plus ressortir l'avantage de travailler avec $\mathrm{Sp}^{\Omega}(\mathcal{C})$ plutôt que $\mathrm{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{C})$.

Definition 4.1 Une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est dite présentable si elle est équivalente à $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_0)$ la catégorie des Ind-objets de $\mathcal{C}_0$, avec $\mathcal{C}_0$ ayant un ensemble d'objets, et que de plus elle admet toutes les petites colimites (i.e. indexées par un ensemble).

Remark 4.2 Une autre définition, qui est équivalente par un résultat de Simpson (cf. [Lur08] 5.5.1), est de demander que $\mathcal{C}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine $\mathcal{P}(\mathcal{C}_0, R)$ de $\mathcal{P}(\mathcal{C}_0) := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0^{op}, \mathcal{S})$. Ici, $\mathcal{C}_0$ est une ∞-catégorie avec un ensemble d'objets, R un un ensemble de morphisme de $\mathcal{P}(\mathcal{C}_0)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{C}_0, R)$ la sous-catégorie pleine des foncteurs F tels que $\mathrm{Map}(f, F)$ est une équivalence pour chaque $f \in R$.

L'intérêt de la présentabilité est qu'elle est le cadre où se réalise le théorème des foncteurs adjoints:

Theorem 4.3 Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre ∞-catégories présentables, alors

- F a un adjoint à droite ssi F préserve les colimites
- F a un adjoint à gauche ssi F préserve les limites et est accessible (i.e. préserve les colimites suffisamment filtrées)

Notons Pr_*^L l'∞-catégorie des ∞-catégories présentables pointées et des foncteurs à gauche (i.e. ayant un adjoint à droite), et Pr_*^R pour les foncteurs à droite. Un foncteur à gauche ou à droite entre ∞-catégories stables est automatiquement exact, donc on a deux sous-catégories Pr^L_{Ex} et Pr^R_{Ex} qui sont pleines et dont les objets sont les ∞-catégories stables présentables.

Dans une ∞-catégorie présentable, on a un foncteur $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ qui préserve les colimites, il a donc toujours un adjoint, qui n'est autre que $\Omega : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Lemma 4.4 Si $\mathcal{C}$ est présentable pointée, alors $\mathcal{C}$ est stable ssi Σ ou Ω est une équivalence.

Proof. Ce lemme est une conséquence de 2.1 puisqu'une ∞-catégorie présentable pointée a toujours les cofibres de tous les morphismes, et donc $\mathcal{C}$ est stable ssi Σ est une équivalence, ce qui est équivalent à demander que son adjoint Ω soit une équivalence. $\square$

Vu le lemme, si on a $\mathcal{C}$ présentable pointée, on peut faire comme en partie 2 et considérer $\mathrm{Sp}^\Sigma(\mathcal{C})$ et $\mathrm{Sp}^\Omega(\mathcal{C})$. Comme inverser Σ ou son adjoint est équivalent, on peut s'attendre à ce que les deux ∞-catégories coïncident. Il y a néanmoins un problème, qui est le suivant.

L'inclusion $\mathrm{Pr}^R_* \subset \mathbf{Cat}_\infty$ préserve les limites mais $\mathrm{Pr}^L_* \subset \mathbf{Cat}_\infty$ ne préserve pas les colimites (même pas les colimites filtrantes). Autrement dit, si $\mathcal{C}$ est présentable pointée, alors $\mathrm{Sp}^\Omega(\mathcal{C})$ (et donc $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ est présentable mais pas $\mathrm{Sp}^\Sigma(\mathcal{C})$ en général. $\mathrm{Sp}^\Omega(\mathcal{C})$ coïncide donc avec la colimite suivante, *prise dans* Pr^L_*:

$$\tilde{\mathrm{Sp}}^\Sigma(\mathcal{C}) := \mathrm{colim}(\mathcal{C} \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C} \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C} \xrightarrow{\Sigma} ...)$$

References

[CDH+21] Baptiste Calmès, Emanuele Dotto, Yonathan Harpaz, Fabian Hebestreit, Markus Land, Kristian Moi, Denis Nardin, Thomas Nikolaus, and Wolfgang Steimle. Hermitian K-theory for stable ∞-categories II: Cobordism categories and additivity. 2021. arXiv:2009.07224v2.

[Lur08] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, 2008. arXiv:math/0608040v4.

[Lur17] Jacob Lurie. *Higher Algebra*. Princeton University Press, 2017. `http://people.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf`.

[ML97] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1997.